

Barem de corectare OLM 2023 Clasa a XI-a

P1

Observăm că, prin schimbări de linii și înmulțiri cu (-1) , putem obține pe ultima coloana toate elementele egale cu 2.	2p
$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 4(\pm \text{aria}(M_1 M_2 M_3))$	3p
Punctele M_1, M_2 și M_3 , fiind printre punctele $(2, 2); (-2, 2); (2, -2); (-2, -2)$, determină un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime 4, deci $\max(\det(A)) = 32$.	2p

P2

a) $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ și din egalitatea $XA = AX$ se obține că $a = i, b = d = f = g = h, c \in R, e \in R$	2p
b) Din ecuația matriceală se trage concluzia că X comută cu A la înmulțire și conform punctului a) $X = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	2p
Folosind metoda inducției matematice $X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & na^{n-1}c \\ 0 & e^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; pentru $n = 2023$ se obțin unicele valori reale posibile $a = c = 1, e = 2$.	3p

P3

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(a - \sqrt{b + \frac{c}{x} + \frac{3}{x^2}}) = -1$ implică faptul că, în mod necesar, $a = \sqrt{b}$.	2p
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a + \sqrt{b} = 2 \Rightarrow a = b = 1$	2p
$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + cx + 3} - x) = \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$	2p
Verificarea faptului că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$	1p

P4 – supliment GM11/2022

a) $a_n \geq 0, a_{n+1} \geq a_n$, deci șirul este crescător.	1p
$a_n^2 = a_{n-1}^2 + a_{n-1} = a_{n-2}^2 + a_{n-2} + a_{n-1} = a_1^2 + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \geq 1 + (n-1) = n$	2p
$a_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$	1p
b) Pentru limita cerută se va aplica lema lui Stoltz-Cesaro. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right) = 1$, se obține succesiv $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}^2 + a_n} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + a_n} + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n} + 1} = \frac{1}{2}.$	2p
Fiind îndeplinite condițiile lemei, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1 - n} = \frac{1}{2}$	1p