

Barem de corectare OLM 2023 Clasa a X-a**P1**

$g = \frac{a+b+c}{3} = 0 \Rightarrow a+b+c=0$	2p
$PA^2 + PB^2 + PC^2 = z-a ^2 + z-b ^2 + z-c ^2 = (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) + (z-b)(\bar{z}-\bar{b}) + (z-c)(\bar{z}-\bar{c}) =$ $= 3 z ^2 - z(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) - \bar{z}(a+b+c) + 3 \bar{a} ^2 = 3 z ^2 - z(\overline{a+b+c}) - \bar{z}(a+b+c) + 3 \bar{a} ^2$, unde z este afixul punctului P	3p
$ a = b = c = z =1 \Rightarrow PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6$	2p

P2

$z^3 - \frac{1}{z^3} = \left(z - \frac{1}{z}\right)^3 + 3\left(z - \frac{1}{z}\right)$	2p
$4 \leq \left \left(z - \frac{1}{z}\right)^3 + 3\left(z - \frac{1}{z}\right) \right \leq \left z - \frac{1}{z} \right ^3 + 3 \left z - \frac{1}{z} \right $	2p
Notând $t = \left z - \frac{1}{z} \right \geq 0$ se obține succesiv $t^3 + 3t \geq 4 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 4) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1$ (deoarece $t^2 + t + 4 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ pentru orice t real), deci $\left z - \frac{1}{z} \right \geq 1$.	3p

P3

a) $(\sqrt[3]{2}-1)(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{2^3}-1 = \sqrt[3]{2}-1$	2p
$(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2}-1) = 1$, deci prin amplificare cu $\sqrt[3]{2}-1$ se obține egalitatea din enunț.	2p
b) $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} = \frac{1}{\log_7 \frac{98}{7}} + \frac{1}{\log_2 \frac{28}{2}} = \frac{1}{\log_7 14} + \frac{1}{\log_2 14} =$	2p
$= \log_{14} 7 + \log_{14} 2 = 1$	1p

P4 -autori: Mihai Opincariu, Vasile Pop - GM 10/2022

Pentru $x=y=-1 \Rightarrow f(-1+f(0))=1$	1p
Pentru $x=-1, y=0 \Rightarrow f(-1+f(0))=f(-1)+1$, deci $f(-1)=0$	1p
Pentru $x=0, y=-1 \Rightarrow 1=f(f(-1))=f(0)$	1p
Alegând x și y astfel încât $(1+x)y=-1$, adică $y=-\frac{1}{1+x}, x \neq -1$, se obține $f(x+f(-1)) = \frac{x}{x+1} f(x) + 1$, de unde $f: R - \{-1\} \rightarrow R, f(x) = x+1$	2p
Dar $f(-1) = -1+1$, deci $f: R \rightarrow R, f(x) = x+1$	1p
Verificarea că funcția găsită îndeplinește condiția din enunț.	1p