

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
Clasa a X-a

1. (7p) Se consideră numerele complexe a, b, c , afixele vârfurilor triunghiului echilateral ABC și $g = 0$, afixul centrului său de greutate. Dacă P este un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC , calculați $PA^2 + PB^2 + PC^2$, știind că $|a| = 1$.

2. (7p) Se consideră $z \in \mathbb{C}^*$ cu proprietatea $\left|z^3 - \frac{1}{z^3}\right| \geq 4$. Demonstrați că $\left|z - \frac{1}{z}\right| \geq 1$.

3. a) (4p) Arătați că $\frac{1}{(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(1 + \sqrt[9]{2} + \sqrt[9]{4})} = \sqrt[9]{2} - 1$.

b) (3p) Știind că $a = \log_7 98$ și $b = \log_2 28$, arătați că $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} = 1$.

4. (7p) Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x + f((1+x)y)) = (1+y)f(x) + 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.