

# Barem de corectare OLM 2023 Clasa a IX-a

## P1 – autor Carina Viespesu - GM 10/2022

Folosind inegalitatea CBS (sau media aritmetică $\leq$ media pătratică) se obține $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = n^2$	2p
de unde $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$	2p
Folosind media aritmetică $\geq$ media armonică (sau CBS) se obține $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\dots+a_n+n} \geq \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2}$	3p

## P2 – autor Brodețchi Mircea

a) $I_1 = [4; 6], J_1 = [3; 5]$	2p
$I_1 \cap J_1 = [4; 5]$ și $I_1 \cup J_1 = [3; 6]$	1p
b) $I_a = [5-a; a+5]$ și $J_a = [2a+1; 2a+3]$ pentru orice $a \in N$	1p
Din $I_a \cap J_a = \emptyset$ rezultă cazurile: 1. $a+5 < 2a+1 \Rightarrow a \in (4, +\infty) \cap N$ ; 2. $2a+3 \leq 5-a \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cap N = \{0\}$	2p
În concluzie, $a \in N - \{1, 2, 3, 4\}$	1p

## P3

Dacă $P(n): \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right], n \in N^*$ , atunci $P(1): \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] \left[\frac{1}{1}\right]$ , propoziție adevărată	1p
Presupunem $P(n)$ adevărată pentru $n \in N^*$ . $P(n+1): \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] \left[\frac{n+2}{2}\right]$	2p
$\Leftrightarrow \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] \left[\frac{n+2}{2}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] \left[\frac{n}{2} + 1\right]$	2p
$\Leftrightarrow \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$ , egalitate adevărată în baza identității $[x+n] = [x] + n, (\forall) x \in R, (\forall) n \in Z$ . În concluzie, $P(n)$ este adevărată, $(\forall) n \in N^*$ .	2p

## P4 - autor Marius Gîrjoabă

Folosind vectorii de poziție ai centrelor de greutate, $G$ mijlocul $[G_1G_2] \Leftrightarrow \vec{r}_G = \frac{\vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_2}}{2} \Leftrightarrow$	1p
$\Leftrightarrow \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E}{5} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E}{4} + \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3} \Leftrightarrow$	2p
$\Leftrightarrow 4\vec{r}_B + 9\vec{r}_D + 9\vec{r}_E = 11\vec{r}_A + 11\vec{r}_C$	1p
$AGCG_1$ paralelogram $\Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_G + \vec{r}_{G_1} \Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E}{5} + \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E}{4} \Leftrightarrow$	2p
$\Leftrightarrow 11\vec{r}_A + 11\vec{r}_C = 4\vec{r}_B + 9\vec{r}_D + 9\vec{r}_E$	1p