

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
Clasa a VI-a

1. a) (3p) Comparați cardinalele mulțimilor A și B , știind că $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2021} < x \leq 2^{2023}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^{2019} < x \leq 3^{2021}\}$. Justificați răspunsul.

b) (4p) Se consideră o mulțime A de numere naturale, care are următoarele proprietăți:

1) $8 \in A$; 2) Dacă $x \in A$, atunci $5 \cdot x + 3 \in A$; 3) Dacă $4 \cdot x \in A$, atunci $2 \cdot x \in A$; 4) Dacă $x^3 \in A$, atunci $x \in A$.
Arătați că mulțimea A conține cel puțin cinci numere prime.

2. (7p) Dacă numerele naturale x, y, z verifică relația $17x + 12y = 5z$, arătați că numărul $(x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x)$ este divizibil cu 170.

3. (7p) Se consideră punctele A, B, C, D pe cerc, în această ordine și se notează cu a, b, c, d măsurile arcelor AB, BC, CD, DA , exprimate în grade. Știind că mulțimile $\{a, b, c, d\}$ și $\{a + 1, b + 2, c + 3, d + 4\}$ sunt direct proporționale, calculați măsurile arcelor AB, BC, CD, DA .

4. Unghiurile $\sphericalangle AOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOB$ cu interioarele disjuncte formează împreună unghiul alungit $\sphericalangle AOB$.
Semidreptele OE și OF sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$, respectiv $\sphericalangle DOB$, astfel încât $\sphericalangle EOF = 120^\circ$.

a) (3p) Determinați măsura unghiului $\sphericalangle COD$.

b) (4p) Dacă, în plus, se construiește dreapta OM perpendiculară pe dreapta OC , astfel încât punctele M și C să fie de aceeași parte a dreptei AB și $\sphericalangle FOM = 10^\circ$, aflați măsura unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle DOB$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 2 ore.