

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023  
Clasa a XI-a

1. (7p) Dacă  $A \in M_3(\{2, -2\})$  este o matrice pătratică de ordinul 3 cu elemente numere reale de modul 2, determinați valoarea maximă pe care o poate lua  $\det(A)$ .

2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(N)$ .

a) (2p) Aflați  $X \in M_3(R)$ , astfel încât  $X \cdot A = A \cdot X$ ;

b) (5p) Demonstrați că pentru  $n = 2023$  există o unică matrice  $X \in M_3(R)$ , astfel încât  $X^{2023} = A$ .

3. (7p) Se consideră funcția  $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx + 3}$ . Determinați  $a, b, c \in (0, +\infty)$ , astfel încât  $y = 2x + 1$  să fie asimptotă oblică spre  $+\infty$ , iar  $y = -1$  asimptotă orizontală spre  $-\infty$ .

4. Se definește șirul  $(a_n)_{n \in N^*}$  prin  $a_1 = 1$  și  $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n}, \forall n \in N^*$ .

a) (4p) Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ;

b) (3p) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.