

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
Clasa a VIII-a

1. a) (3p) Arătați că numărul $x = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ aparține intervalului $\left(\frac{51}{100}; 1\frac{1}{10}\right)$.

b) (4p) Demonstrați că $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \in I$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ și $I = (a, b)$.

2. (7p) Știind că numerele reale x și y verifică relația $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 50 = 0$, arătați că $x \in [4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}]$ și $y \in [6 - \sqrt{2}, 6 + \sqrt{2}]$.

3. În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ se dau $AB = 6$ cm și $CC' = 4$ cm. Se consideră punctele M pe segmentul $A'D'$ și N pe segmentul $C'D'$, astfel încât $A'M = \frac{2}{3} A'D'$ și $D'N = \frac{1}{2} NC'$.

a) (2p) Stabiliți poziția dreptei MN față de planul (ACC') .

b) (5p) Calculați cosinusul unghiului dintre dreptele BM și CN .

4. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ de muchie a , M mijlocul lui AB , N mijlocul lui AD și O centrul feței $ADD'A'$.

a) (3p) Demonstrați că dreapta $C'O$ este perpendiculară pe planul $(A'MD)$.

b) (4p) Calculați tangenta unghiului format de planele $(C'MN)$ și $(C'CD)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.