

Barem de corectare OLM 2023 Clasa a XII-a

P1

| | |
|--|----|
| a) $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx = - \int_1^{-1} \frac{t^2}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\frac{1}{e^t} + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{t^2 e^t}{e^t + 1} dt$ | 2p |
| $I + I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + x^2 e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{3}$ | 1p |
| b) $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 1}{(x^2)^3 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx =$ | 1p |
| $= \int \frac{x^4 - x^2 + 1 + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \arctg x + \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^6 + 1} dx = \arctg x + \frac{1}{3} \arctg x^3 + C$ | 3p |

P2 – autor b) Vasile Pop - GM 10/2022

| | |
|---|----|
| a) $F' = f, (F^2)' = f^2 \Rightarrow 2F(x)f(x) = f^2(x), \forall x \in R$ | 1p |
| $f(x) \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow 2F(x) = f(x) \Rightarrow 2 = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{F'(x)}{F(x)}$ | 1p |
| Prin integrare se obține $F(x) = ae^{2x}, a > 0$, de unde $f(x) = be^{2x}, b > 0$. | 1p |
| b) $(F^\alpha)' = f^\alpha \Rightarrow \alpha F^{\alpha-1} f = f^\alpha \Rightarrow \alpha F^{\alpha-1} = f^{\alpha-1} \Rightarrow \alpha = \frac{f^{\alpha-1}(x)}{F^{\alpha-1}(x)} > 0$, deci pentru $\alpha < 0$ nu există funcții f . | 2p |
| Pentru $\alpha \in R_+^* - \{1\}$, prin ridicare la $\frac{1}{\alpha-1}$, rezultă $\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{F'(x)}{F(x)}$; prin integrare se obține $F(x) = ae^{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} x}, a > 0$, de unde $f(x) = be^{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} x}, b > 0$. | 2p |

P3

| | |
|--|----|
| a) Se acordă câte un punct pentru fiecare axiomă enunțată și verificată. | 3p |
| b) $x \circ y = (x - a)(y - a) + a \Rightarrow x \circ x = (x - a)^2 + a$ | 1p |
| Prin inducție matematică, $x \circ x \circ \dots \circ x = (x - a)^n + a$, unde x apare de n ori în partea stângă. | 1p |
| Ecuția devine $(x - a)^{2023} + a = x \Leftrightarrow (x - a)^{2023} = x - a$, deci $x_1 = a$ sau $(x - a)^{2022} = 1$, adică $x_1 = a, x_2 = a + 1, x_3 = a - 1$. | 2p |

P4

| | |
|---|----|
| a) Presupunând că $x^2 = e, \forall x \in G$, ar rezulta că G este comutativ (problemă din manual), atunci mulțimea $\{e, x, y, xy\}$ ar fi un subgrup, oricare ar fi $x \neq y$ și diferite de e . | 1p |
| Dar, din teorema lui Lagrange rezultă că ordinul unui subgrup divide ordinul grupului, adică 4 ar trebui să dividă pe 6, ceea ce este o contradicție. | 1p |
| Alternativ: Teorema lui Cauchy afirmă că pentru orice divizor prim p al ordinului grupului, există un element de ordin p în grup. Cum 3 divide pe 6, există în G un element de ordin 3. | |
| b) Există un grup cu 8 elemente, în care orice element diferit de elementul neutru are ordinul 2. | 1p |
| Verificarea că toate elementele unui grup cu 8 elemente, diferite de elementul neutru, au ordinul 2 (De exemplu, în grupul $(Z_2 \times Z_2 \times Z_2, +)$ suma oricăror două elemente diferite de elementul nul este $(0, 0, 0)$, deci au ordinul 2.) | 3p |