

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
Clasa a XII-a

1. Calculați integralele:

a) (3p) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx;$

b) (4p) $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx, x \in \mathbb{R}.$

2. Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, care admit primitiva $F : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ce are proprietatea că:

a) (3p) F^2 este o primitivă a funcției f^2 ;

b) (4p) F^α este o primitivă a funcției f^α , unde $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$

3. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție " \circ " definită pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prin relația $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a.$

a) (3p) Demonstrați că (\mathbb{R}, \circ) este monoid comutativ;

b) (4p) Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ x \circ x \circ \dots \circ x = x$, unde x apare de 2023 de ori în membrul stâng al ecuației.

4. a) (4p) Se consideră (G, \cdot) un grup cu 6 elemente. Demonstrați că există $x \in G$ cu proprietatea că $x^2 \neq e$, unde e este elementul neutru al grupului.

b) (3p) Este adevărată proprietatea de la punctul a) pentru orice grup cu 8 elemente? Justificați răspunsul.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.