

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
Clasa a VII-a

1. a) (4p) Se consideră numerele $a = \frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{3}{\sqrt{27}} + \sqrt{3}^{-1}$ și $b = \sqrt{28} + \sqrt{48} - \frac{14}{\sqrt{7}} + 5\sqrt{75} - \sqrt{147}$. Arătați că numărul $n = \frac{3a+b}{\sqrt{3}}$ este un pătrat perfect.

b) (3p) Calculați valoarea lui $\sqrt{2m}$ dacă $m = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+3}$.

2. (7p) Determinați numerele naturale impare n pentru care numărul $a(n) = \sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^5 + 145}$ este natural.

3. (7p) În paralelogramul $ABCD$ se prelungesc laturile AB și AD cu segmentele BE , respectiv DF astfel încât $AE = \frac{3}{2} \cdot AB$, $D \in AF$ și $DF = \frac{AD}{2}$, $B \in AE$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, iar M , P și Q sunt mijloacele segmentelor CO , BC , respectiv DC , demonstrați că punctele E , P , M , Q și F sunt coliniare.

4. Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele E , respectiv F , diferite de vârfurile pătratului, astfel încât $AF \equiv DE$:

a) (3p) Demonstrați că $AF \perp DE$.

b) (4p) Prin punctul P , intersecția dreptelor DB și AF , se construiește $MN \parallel DE$, unde $M \in AB$, $N \in CD$. Demonstrați că patrulaterul $AMFN$ este un trapez isoscel.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.