

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023  
Clasa a IX-a

1. (7p) Știind că  $n \in N^*$  și că  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt numere reale pozitive cu proprietatea  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$ , demonstrați inegalitatea

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{a_n + 1} \geq \frac{n}{2}.$$

2. Se consideră mulțimile:

$I_a = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| \leq a\}$  și  $J_a = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left[\frac{x-1}{2}\right] = a\right\}$ , unde  $a \in \mathbb{N}$  și  $[t]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $t$ .

a) (3p) Calculați  $I_1 \cap J_1$  și  $I_1 \cup J_1$ .

b) (4p) Determinați valorile lui  $a$  pentru care  $I_a \cap J_a = \emptyset$ .

3. (7p) Demonstrați că pentru orice  $n \in N^*$  are loc identitatea

$$\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

4. (7p) În pentagonul  $ABCDE$  punctul  $G$  este centrul de greutate, punctul  $G_1$  este centrul de greutate al patrulaterului  $ACDE$ , iar punctul  $G_2$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ . Demonstrați că  $G$  este mijlocul segmentului  $[G_1G_2]$  dacă și numai dacă patrulaterul  $AGCG_1$  este paralelogram.

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.